BTS – Groupement C – Mathématiques – 14 mai 2013 – Correction

(des erreurs sont possibles)

Exercice 1 (10 points)

Partie 1

Déterminer la probabilité qu'un paquet de farine, pris au hasard, soit conforme.

La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 825 et d'écart type 32,6, $\mathcal{N}(825\,;\,32,6)$.

La question revient à calculer $p(750 \leqslant X \leqslant 900)$.

Posons $T = \dfrac{X-825}{32,6}$. On sait qu'alors T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

On a : $p(750 \leqslant X \leqslant 900)$

$$\begin{aligned}
&= p\left(-\frac{75}{32,6} \leqslant T \leqslant \frac{75}{32,6}\right)\\
&= p\left(T \leqslant \frac{75}{32,6}\right) - p\left(T \leqslant -\frac{75}{32,6}\right)\\
&= p\left(T \leqslant \frac{75}{32,6}\right) - \left(1 - p\left(T \leqslant \frac{75}{32,6}\right)\right)\\
&= 2p\left(T \leqslant \frac{75}{32,6}\right) - 1\\
&\approx 2p(T \leqslant 2,3) - 1\\
&\approx 2 \times 0,9893\text{-}1 \quad \text{(d'après la table de la loi normale centrée réduite)}\\
&\approx 0,9786
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc la probabilité qu'un paquet de farine soit conforme est égale à 0,9786.}}$

Partie 2

1. Quelle est la loi suivie par Y ?
   Le choix des 50 paquets de farine est assimilable à un tirage avec remise.
   Les 50 tirages sont donc indépendants et identiques.
   Pour chaque paquet choisi, il y a 2 issues :
   - le paquet est non conforme (succès de probabilité $p = 0,02$)
   - le paquet est conforme (échec de probabilité $1 - p = 0,98$).

   La variable Y qui compte le nombre de paquets non conformes suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 50$, $p = 0,02$, soit $\mathcal{B}(50\,;\,0,02)$.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus un paquet non conforme dans le lot.
   Cela revient à calculer $p(Y \leqslant 1)$:
   $$\begin{aligned}
   p(Y \leqslant 1) &= p(Y=0) + p(Y=1)\\
   &= 0,98^{50} + 50 \times 0,02 \times 0,98^{49}\\
   &= 0,36417 + 0,3716\\
   &= 0,73577
   \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait au plus un paquet non conforme dans le lot est 0,73577.}}$
3. On considère que la loi de Y peut être approchée par une loi de Poisson.
   a) Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
   On sait qu'une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$ peut être approchée, sous certaines conditions, par le loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$.
   Donc, ici $\boxed{\lambda = 50 \times 0,02 = 1}$

   b) À l'aide de cette loi de Poisson, calculer la probabilité qu'il y ait moins de 4 paquets non conformes dans le lot.
   $$\begin{aligned}
   p(Y<4) &= p(Y=0) + p(Y=1) + p(Y=2) + p(Y=3)\\
   &= 0,368 + 0,368 + 0,184 + 0,061 \qquad \text{(d'après la table de la loi } \mathcal{P}(1) \text{ fournie en annexe)}\\
   &= 0,981
   \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait moins de 4 paquets non conformes dans le lot est 0,981.}}$

Partie 3

1. Préciser l'hypothèse alternative H_1.
   Comme il s'agit d'un test bilatéral et que H_0 est « $m = 825$ », on en déduit que $\boxed{H_1 \text{ est « } m \neq 825 \text{ »}}$

2. Calculer le réel h tel que $P\left(825-h \leqslant \overline{Z} \leqslant 825+h\right)=0{,}95$

   La variable de décision, $\overline{Z}$, suit la loi $\mathcal{N}(825\,;4{,}6)$, sous l'hypothèse H_0.

   Posons $\overline{T}=\dfrac{\overline{Z}-825}{4{,}6}$. Ainsi, $\overline{T}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

   On a : $$P\left(825-h \leqslant \overline{Z} \leqslant 825+h\right)=0{,}95 \Leftrightarrow P\left(-\frac{h}{4{,}6} \leqslant \overline{T} \leqslant \frac{h}{4{,}6}\right)=0{,}95$$
   $$\Leftrightarrow 2P\left(\overline{T} \leqslant \frac{h}{4{,}6}\right)-1=0{,}95$$
   $$\Leftrightarrow P\left(\overline{T} \leqslant \frac{h}{4{,}6}\right)=0{,}975$$
   $$\Leftrightarrow \frac{h}{4{,}6} \approx 1{,}96, \text{ par lecture inverse de la table } \Pi.$$

   On en déduit : $\boxed{h=1{,}96\times 4{,}6 \approx 9{,}016}$

   Ce nombre permet d'obtenir l'intervalle d'acceptation : $[825-9{,}016\,;825+9{,}016]$, soit environ $[816\,;834]$.

3. Énoncer la règle de décision du test.

   Si, dans un lot de 50 paquets de farine, la moyenne des masses des résidus est dans l'intervalle $[816\,;834]$, alors on peut accepter l'hypothèse nulle H_0 avec un degré de confiance de 95% et on rejette alors l'hypothèse H_1.

   Sinon, si la moyenne des masses des résidus est en dehors de cet intervalle (zone critique) alors, on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte H_1 : il faut donc procéder à des réglages de machines car le lot n'est pas conforme.

4. On prélève 50 paquets au hasard et la moyenne des masses des résidus est de 860 mg.

   $\boxed{\text{On peut donc, au risque d'erreur de 5\%, conclure que la masse des résidus n'est pas conforme.}}$

Exercice 2 (10 points)

Partie 1 : Taux d'alcool, deux exemples

1. À l'aide de la formule, estimer le taux d'alcool dans le sang, une heure après ingestion, d'un homme de 75 kg ayant consommé un verre de 25 cl de bière, deux verres de 10 cl de vin et une flûte de champagne.

   D'après le tableau, cet homme a consommé, en tout, 37 g d'alcool.

   Le taux d'alcool dans le sang est donc : $\boxed{T=\dfrac{37}{75\times 0{,}7}\approx 0{,}7}$.

2. Estimer la quantité d'alcool ingérée par une femme de 55 kg dont le taux d'alcool mesuré est 0,5, une heure après ingestion.

   Cela revient à résoudre : $\dfrac{Q}{55\times 0{,}6}=0{,}5$

   On obtient : $\boxed{Q=0{,}5\times 55\times 0{,}6=16{,}5}$

Partie 2 : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle, notée E, $y'+y=2\mathrm{e}^{-t}$, où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0{,}025\,;+\infty[$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y'+y=0$.

   Cette équation équivaut à $y'=-y$.

   On sait qu'une équation différentielle de la forme $y'=ky$ a pour solution générale $y=C\mathrm{e}^{kt}$.

   Donc la solution générale de l'équation $y'+y=0$ est : $\boxed{y=C\mathrm{e}^{-t}}$

2. Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction g définie sur l'intervalle $[0{,}025\,;+\infty[$ par $g(t)=at\mathrm{e}^{-t}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle E.

   Il faut que l'on ait : $g'(t)+g(t)=2\mathrm{e}^{-t}$, pour tout réel t de $[0{,}025\,;+\infty[$.

   On a : $g(t)=at\mathrm{e}^{-t}$

   Posons : $\begin{cases} u(t)=at \\ v(t)=\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$. On en déduit $\begin{cases} u'(t)=a \\ v'(t)=-\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

   Donc : $g'(t)=a\mathrm{e}^{-t}+at\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)$

   On en déduit les équivalences : $$g'(t)+g(t)=2\mathrm{e}^{-t} \Leftrightarrow a\mathrm{e}^{-t}+at\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)+at\mathrm{e}^{-t}=2\mathrm{e}^{-t}$$
   $$\Leftrightarrow (a-at+at)\mathrm{e}^{-t}=2\mathrm{e}^{-t}$$
   $$\Leftrightarrow a\mathrm{e}^{-t}=2\mathrm{e}^{-t}$$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{a=2}$

3. En déduire la solution générale de l'équation différentielle E.
   Cette solution s'obtient en ajoutant la solution particulière g et la solution générale de l'équation sans second membre $y'+y=0$: $\quad y = C\mathrm{e}^{-t}+2t\mathrm{e}^{-t}$

   ou encore : $\quad \boxed{y=(2t+C)\mathrm{e}^{-t}}$ $\quad$ où C est une constante réelle quelconque.

4. Déterminer la fonction f, solution de l'équation E, qui vérifie $f(0{,}025)=0$.
   On a : $f(t)=(2t+C)\mathrm{e}^{-t}$, car f est une solution de E.
   Donc : $\quad f(0{,}025)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (2\times 0{,}025+C)\mathrm{e}^{-0{,}025}=0$

   $\Leftrightarrow \quad (0{,}05+C)\mathrm{e}^{-0{,}025}=0$

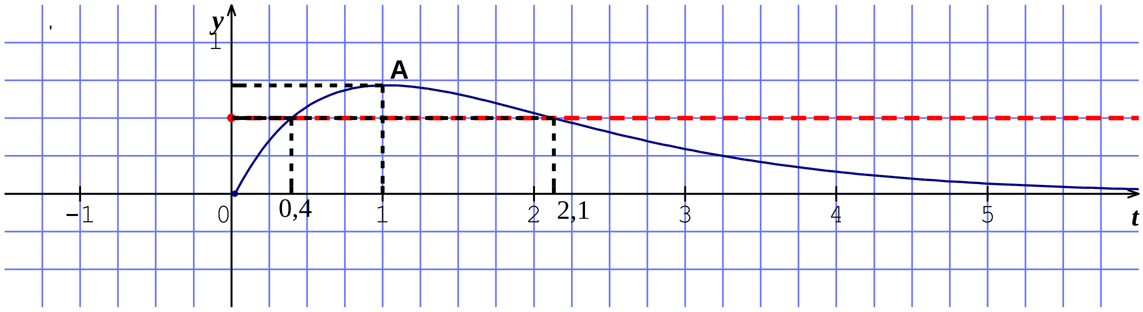
   $\Leftrightarrow \quad 0{,}05+C=0$

   $\Leftrightarrow \quad \boxed{C=-0{,}05}$

   La solution cherchée est donc : $\quad \boxed{f(t)=(2t-0{,}05)\mathrm{e}^{-t}}$, sur l'intervalle $[0{,}025\,;+\infty[$

Partie 3

Compte tenu du délai d'absorption par l'organisme, le taux d'alcool dans le sang d'une personne est donné par la fonction f.
La représentation graphique C_f de la fonction f est donnée ci-dessous :



1. Déterminer, à l'aide du graphique ci-dessus, pendant combien de temps le taux d'alcool reste supérieur à 0,5 g.
   D'après ce graphique, ce taux reste supérieur à 0,5 g dans l'intervalle [0,4 ; 2,1], soit pendant une durée de 1,7 heure, soit 1h 42 minutes environ (on pourra sans doute accepter toute réponse proche de ce résultat).
2. Déterminer graphiquement à quel instant le taux est maximum et donner ce maximum.
   Ce maximum correspond au point A sur le graphique, soit au bout d'une heure. Le taux atteint presque 0,75 g.

Partie 4 : Étude d'une fonction

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(t)=(2{,}05-2t)\mathrm{e}^{-t}$.
   On a : $f(t)=(2t-0{,}05)\mathrm{e}^{-t}$
   Donc $\; f'(t)=2\mathrm{e}^{-t}+(2t-0{,}05)(-\mathrm{e}^{-t})$ $\qquad$ (application de la formule $(uv)'=u'v+uv'$)
   Donc $\; f'(t)=(2-2t+0{,}05)\mathrm{e}^{-t}$
   Donc : $\boxed{f'(t)=(2{,}05-2t)\mathrm{e}^{-t}}$.
2. Étudier le signe de $f'(t)$ et en déduire la valeur exacte du maximum.
   On a : $f'(t)>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2{,}05-2t>0$

   $\Leftrightarrow \quad t<\dfrac{2{,}05}{2}$

   $\Leftrightarrow \quad t<1{,}025.$

   Donc la fonction f' est positive sur $[0{,}025\,;1{,}025]$ et négative sur $[1{,}025\,;+\infty[$.
   Le maximum de la fonction est donc atteint précisément pour $\boxed{t=1{,}025}$

   Le maximum vaut alors : $\quad \boxed{f(1{,}025)=2\mathrm{e}^{-1{,}025}\approx 0{,}7176}$
3. Démontrer que la fonction F définie sur $[0{,}025\,;+\infty[$ par $F(t)=(-2t-1{,}95)\mathrm{e}^{-t}$ est une primitive de f.
   On a : $F'(t)=-2\mathrm{e}^{-t}+(-2t-1{,}95)(-\mathrm{e}^{-t})$
   donc : $F'(t)=(-2+2t+1{,}95)\mathrm{e}^{-t}$
   donc : $F'(t)=(2t-0{,}05)\mathrm{e}^{-t}$
   donc : $\boxed{F'(t)=f(t)}$ $\qquad$ CQFD

4. On considère le taux moyen d'alcool entre les instant $t = 2$ et $t = 4$: $T_m = \frac{1}{2}\int_2^4 f(t)\mathrm{d}t$.

Calculer la valeur exacte de T_m et en donner une valeur arrondie à 0,01 près.

$$T_m = \frac{1}{2}\Big[F(t)\Big]_2^4$$

$$T_m = \frac{1}{2}(F(4) - F(2))$$

$$\boxed{T_m = \frac{1}{2}\left(-9{,}95\mathrm{e}^{-4} + 5{,}95\mathrm{e}^{-2}\right) \approx 0{,}31}$$